Aufgabe 1 *(charakteristisches Polynom)*
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob A Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, und wenn ja, welche.

Aufgabe 2 *(Eigenwerte von Potenzen)*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist λ Eigenwert von A, so ist λ^k Eigenwert von A^k für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ist A invertierbar und λ Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$ und $1/\lambda$ ist ein Eigenwert von A^{-1}.

(c) Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich zu A, so sind A^k, B^k ebenfalls ähnlich für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Ist zum Beispiel A ähnlich zu einer Diagonalmatrix, so lassen sich die Potenzen A^k mit Teilaufgabe c) leicht ausrechnen.

Aufgabe 3 *(Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)*
Finden Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4 *(Exponentialabbildung)*

(1) Berechnen Sie die Potenzen J^k, $k \in \mathbb{N}_0$, der Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Berechnen Sie nun die Reihe $\exp(tJ) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis. Die Matrizen in $\mathbb{S}O(2)$ sind damit durch schiefsymmetrische Matrizen parametrisiert. Dieser Zusammenhang existiert auch $\mathbb{S}O(n)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 20.5.2013, vor der Vorlesung.